Ensemble ordonné

I. Relation d'ordre

E désigne un ensemble.

1°) Définition

Déf : On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E toute propriété vraie pour certain couples (x,y) d'éléments de E et fausse pour les autres.
Lorsqu'un couple (x,y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$. Sinon, on écrit $x\not\mathcal{R}y$.

Déf : Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive ssi $\forall x\in E, x\mathcal{R}x$.
On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique ssi $\forall x,y\in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.
On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique ssi $\forall x,y\in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x=y$.
On dit que $\mathcal{R}$ est transitive ssi $\forall x,y,z\in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Déf : Une relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée une relation d'équivalence.

Déf : On appelle relation d'ordre sur un ensemble E, toute relation binaire à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Une relation d'ordre est usuellement notée $\preccurlyeq$ à défaut d'autres notations.

2°) Ensemble ordonné

Déf : On appelle ensemble ordonné tout couple $(E,\preccurlyeq)$ formé d'un ensemble E et d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E.

Déf : Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
On appelle ordre inverse associé à $\preccurlyeq$ la relation $\succcurlyeq$ définie par : $x\succcurlyeq y \Leftrightarrow y\preccurlyeq x$.
On appelle ordre strict associé à $\preccurlyeq$ la relation $\prec$ définie par : $x\prec y \Leftrightarrow x\preccurlyeq y$ et $x\neq y$.

3°) Ordre total, ordre partiel

Déf : Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
Deux éléments x et y de E sont dits comparables ssi $x\preccurlyeq y$ ou $y\preccurlyeq x$.

Déf : Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
On dit que l'ordre $\preccurlyeq$ est total ssi tous les éléments de E sont deux à deux comparables. On dit alors que $(E,\preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.
Sinon, on parle d'ordre partiel et d'ensemble partiellement ordonné.

4°) Deux relations d'ordre sur $\mathbb{R}^2$

II. Relation d'ordre et sous ensembles

1°) Partie minorée, partie majorée

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

Déf : On appelle majorant de A (resp. minorant), s'il en existe, tout élément $M\in E$ tel que $\forall a\in A, a\preccurlyeq M$ (resp. $M\preccurlyeq a$). On note Majo(A) (resp. Mino(A)) l'ensemble de ces éléments.

Déf : La partie A est dite majorée (resp. minorée) ssi elle possède un majorant (resp. minorant). Une partie majorée et minorée est dite bornée.

2°) Extremum d'une partie

Soit $(E,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

Déf : On appelle plus grand élément de A (resp. plus petit élément), s'il en existe, tout élément $M\in A$ tel que $\forall a\in A, a\preccurlyeq M$ (resp. $M\preccurlyeq a$).

Prop : Si A admet un plus grand élément (resp. plus petit élément) celui-ci est unique. On le note max(A) (resp. min(A))

3°) Propriétés fondatrices des nombres entiers

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Prop : (principe de récurrence)

Soit $E \subset \mathbb{N}$.
Si $0 \in E$ et $\forall p \in \mathbb{N}, p \in E \Rightarrow p+1 \in E$
alors $E = \mathbb{N}$.

Théorème de récurrence simple :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \geq n_0$.
Si 1) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et
2) $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie
alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Théorème de récurrence double :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \geq n_0$.
Si 1) $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et
2) $\forall n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies $\Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ vraie
alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Théorème de récurrence forte :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \geq n_0$.
Si 1) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et
2) $\forall n \geq n_0$ on a $\mathcal{P}(n_0), \ldots, \mathcal{P}(n)$ vraies $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie
alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Théorème de récurrence finie :

Soit $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 \leq n_1$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n_0 \leq n \leq n_1$.
Si 1) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et
2) $\forall n_0 \leq n < n_1$ on a $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie
alors $\forall n_0 \leq n \leq n_1, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

4°) Borne supérieure, borne inférieure

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

Déf : On appelle borne supérieure de A, si elle existe, le plus petit des majorants de A. On la note $\sup A$.
On appelle borne inférieure de A, si elle existe, le plus grand des minorants de A. On la note $\inf A$.
Sous réserve d'existence : $\sup A = \min(Majo(A))$ et $\inf A = \max(Mino(A))$.

Prop : Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Si A admet un plus petit élément alors A admet une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

5°) Propriétés fondatrices des nombres réels

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Convention :

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.
Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée, on pose $\inf A = -\infty$.
Si $A = \varnothing$, on pose $\sup A = -\infty$ et $\inf A = +\infty$.

Théorème :(réalisation séquentielle d'une borne sup/inf)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$.
Il existe $(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $v_n \to \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$.

III. Fonctions et relation d'ordre

1°) Comparaison de fonction

Soit E un ensemble et $(F,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné

Déf : On définit une relation binaire notée $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{F}(E,F)$ par :
$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \preccurlyeq g(x)$.

Prop : $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E,F)$.

2°) Monotonie de fonctions

Soit $(E,\preccurlyeq)$, $(F,\preccurlyeq)$ et $(G,\preccurlyeq)$ trois ensembles ordonnés.

Déf : On dit que $f : E \to F$ est croissante (resp. décroissante) ssi
$\forall x, y \in E, x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)$ (resp. $x \preccurlyeq y \Rightarrow f(y) \preccurlyeq f(x)$).
On dit que $f : E \to F$ est strictement croissante (resp. décroissante) ssi
$\forall x, y \in E, x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$ (resp. $x \prec y \Rightarrow f(y) \prec f(x)$).
On dit que f est monotone ssi f est croissante ou décroissante.

Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si f et g ont même monotonie alors $g \circ f$ est croissante.
Si f et g sont de monotonies contraires alors $g \circ f$ est décroissante.

Prop : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .
La suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \succcurlyeq u_n$ (resp. $u_{n+1} \preccurlyeq u_n$).
La suite (u_n) est strictement croissante (resp. décroissante) ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \prec u_n$ (resp. $u_{n+1} \prec u_n$)

3°) Fonction minorée, majorée

Soit E un ensemble, $(F,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Déf : On appelle majorant de $f : E \to F$, s'il en existe, tout majorant de $\mathrm{Im}\, f$ i.e. tout élément $M \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) \preccurlyeq M$.
On appelle minorant de $f : E \to F$, s'il en existe, tout minorant de $\mathrm{Im}\, f$ i.e. tout élément $M \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) \succcurlyeq M$.
La fonction $f : E \to F$ est dite majorée (resp. minorée) ssi elle possède au moins un majorant (resp. minorant).
Une fonction minorée et majorée est dite bornée.

4°) Extremum d'une fonction

Soit E un ensemble et $(F,\preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.

Déf : On dit que $f : E \to F$ admet un maximum en $a \in E$ ssi $\forall x \in E, f(x) \preccurlyeq f(a)$.
$f(a)$ apparaît alors comme étant le plus grand élément de $\mathrm{Im}\, f$, on l'appelle maximum de f et on le note $\max f$ ou $\max\limits_{x\in E} f(x)$.
On dit que f admet un minimum en $a \in E$ ssi $\forall x \in E, f(x) \succcurlyeq f(a)$.
$f(a)$ apparaît alors comme étant le plus petit élément de $\mathrm{Im}\, f$, on l'appelle minimum de f et on le note $\min f$ ou $\min\limits_{x\in E} f(x)$.
On appelle extremum, un minimum ou un maximum d'une fonction.

5°) Borne supérieure et borne inférieure d'une fonction

Soit E un ensemble.

Déf : On appelle borne supérieure (resp. inférieure) de $f : E \to \mathbb{R}$, si elle existe, la borne supérieure (resp. inférieure) de $\mathrm{Im}\, f$. On la note $\sup f$ ou $\sup\limits_{x\in E} f(x)$ (resp. $\inf f$ ou $\inf\limits_{x\in E} f(x)$).